

Subiectul I

(30 puncte)

1.	$\sqrt[3]{64} + \log_3 \frac{1}{9} + 5^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{125} = 4 + (-2) + \sqrt{5^4} =$	3p
	$= 2 + 25 = 27$	2p
2.	$y_{\min} = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{4-9m}{4}$	2p
	$\frac{4-9m^2}{4} = -8 \Leftrightarrow 9m^2 - 36 = 0$	2p
	$m \in \{-2, 2\}.$	1p
3.	Condiție: $x > 0 \Rightarrow x \in (0, \infty)$	1p
	$\lg x = t \Rightarrow t^2 - 5t + 6 = 0$	2p
	$t_1 = 2 \Rightarrow \lg x = 2$, de unde $x = 100$	1p
	$t_2 = 3 \Rightarrow \lg x = 3$, de unde $x = 1000$	1p
4.	$C_{13}^1 + C_{13}^3 + C_{13}^5 + C_{13}^7 + C_{13}^9 + C_{13}^{11} + C_{13}^{13} = 2^{13-1} = 2^{12}$	3p
	$2^{n-2} = 2^{12} \Rightarrow n - 2 = 12 \Leftrightarrow n = 14.$	2p
5.	$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = 1, y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = 1$	2p
	$G(1,1)$	1p
	$\overrightarrow{AG} = (x_G - x_A)\vec{i} + (y_G - y_A)\vec{j} = 2\vec{i}, \overrightarrow{AG}(2,0)$	2p
6.	$\sin 2a = 2 \sin a \cos a, \forall a \in \mathbb{R}$	1p
	$\cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a} \stackrel{\text{cadr I}}{=} \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$	2p
	$\sin 2a = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}.$	2p

Subiectul II

(30 puncte)

1. a)	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & m & m \end{pmatrix}$ inversabilă $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$	2p
	$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & m & m \end{vmatrix} = (m-1)^2$	2p
	A inversabilă $\Leftrightarrow (m-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$	1p
b)	Dacă $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, atunci $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) = 3$, deci sistemul este compatibil.	3p
	Dacă $m = 1$, atunci $\text{rang}(A) = 1$, iar $\text{rang}(\bar{A}) = 2$, deci sistemul este incompatibil.	2p
c)	Pentru $m = 2$ se obține $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ cu $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1$	2p
	$\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) = \text{nr. necunoscute} = 3$, adică sistemul este de tip Cramer	1p
	Soluția este $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 4; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 0; z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = -3, (4, 0, -3).$	2p

2. a)	Asociativitate, Comutativitate	1p
	Element neutru: $(\exists)e \in G$ a.î. $(\forall)x \in G \quad x \circ e = e \circ x = x$. Se obține $e = 5 \in G$.	2p
	Elemente simetrizabile: $(\forall)x \in G, (\exists)x' \in G$ a.î. $x \circ x' = x' \circ x = 5$, se obține $x' = \frac{4x-15}{x-4} \in G$.	2p
b)	Injectivitate: $\forall x_1, x_2 \in (0, \infty)$ cu $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 + 4 = x_2 + 4 \Rightarrow x_1 = x_2$	1p
	Surjectivitate: Din $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 4; \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$; funcție continuă și strict crescătoare se obține $\text{Im } f = (4, \infty)$, deci f este surjectivă.	1p
	$\forall x, y \in (0, \infty)$ avem $f(x \cdot y) = f(x) \circ f(y)$	1p
	$f(x \cdot y) = xy + 4$, iar $f(x) \circ f(y) = (x+4) \circ (y+4) = xy + 4$.	2p
c)	Avem $x \circ x = (x-4)^2 + 4$ și $x \circ x \circ x = (x-4)^3 + 4$	2p
	Inducție matematică pentru $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{n \text{ ori}} = (x-4)^n + 4, \forall n \in \mathbb{N}^*$.	2p
	$\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{2022 \text{ ori}} = (x-4)^{2022} + 4$	1p

Subiectul III

(30 puncte)

1. a)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2x - 1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x - 1}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 2}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0$.	3p
	De unde, $y = 0$ (axa Ox) este ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$.	2p
b)	$f'(x) = (2x-2)e^x + (x^2-2x-1)e^x = (x^2-3)e^x, \forall x \in \mathbb{R}$	2p
	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2-3)e^x = 0$ cu soluțiile $x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = \sqrt{3}$.	1p
	Din tabelul cu semnul derivatei, avem că $x_1 = -\sqrt{3}$ este punct de maxim și $x_2 = \sqrt{3}$ este punct de minim.	2p
c)	$f''(x) = 2xe^x + (x^2-3)e^x = (x^2+2x-3)e^x, \forall x \in \mathbb{R}$	2p
	$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2+2x-3)e^x = 0$ cu soluțiile $x_1 = -3, x_2 = 1$.	1p
	Din tabelul cu semn al derivatei a doua se obține că f este convexă pentru $x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$ și f este concavă pentru $x \in (-3, 1)$.	2p
2. a)	$\int_0^1 f_1(x) dx = \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx =$	2p
	$= \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [x - \ln(1+x)]_0^1 = 1 - \ln 2$.	3p
b)	$\int_0^1 f_1(x) dx + \int_0^1 \ln(x+1) dx = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx + \int_0^1 x' \cdot \ln(x+1) dx =$	2p
	$= \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx + \left(x \ln(x+1) \Big _0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx \right) = x \ln(x+1) \Big _0^1 = \ln 2$.	3p
c)	Avem $\frac{x^n}{1+x^n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*, x \in (a, b)$	2p
	$\int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \frac{x^n}{1+x^n} dx \leq \int_a^b dx = x \Big _a^b = b - a = 1$.	3p